Ecole Louis de BROGLIE - EFREI - EISTI - ESCOM - ESEO - ESIEA
ESIEA Ouest - ESME Sudria - ESTIT - ISEB - ISEM - ISEN - ISEP - ITECH

CONCOURS ECRIN 1996

SERIE M

COMPOSITION de MATHEMATIQUES - I

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.

Les candidats pourront admettre certains des résultats demandés et les utiliser par la suite, même s'ils ne les ont pas démontrés, à condition de le mentionner explicitement sur leur copie.

"L'usage de la calculatrice est INTERDIT".

Toutes les fonctions utilisées dans ce problème sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

On note $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des fonctions 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et dont la valeur en tout point est la demi-somme de la limite à droite et de la limite à gauche en ce point.

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si f est un élément de $\mathcal{D}$, on dit que f est *développable en série de Fourier* sur A si et seulement si la série de Fourier de f converge simplement sur A et admet f pour somme.

Partie I

Les résultats obtenus dans cette partie seront utilisés dans la suite du problème.

1° Pour $x \in]0, \pi[$, calculer les sommes

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin[(2k+1)x] \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos[(2k+1)x] .$$

2° Soient a et b réels vérifiant $0 < a < b < \pi$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_a^b \frac{\cos(2nt)}{\sin t} \, dt \right) = 0 . \qquad (1)$$

3° Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On *suppose* que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En remarquant que pour $k \geqslant 1$, $a_k = A_k - A_{k-1}$, montrer que la série $\sum \frac{a_n}{2n+1}$ converge et établir la relation

$$(\forall\, n \in \mathbb{N}) \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{2k+1} = -\frac{A_n}{2n+3} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2A_k}{(2k+1)(2k+3)}\,. \tag{2}$$

Partie II

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = \frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}\,.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction appartenant à $\mathcal{D}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2° Soit $x \in]0, \pi[$.

a) Etablir la convergence de la série $\sum u_n(x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = -\frac{1}{2} \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{x} \frac{\cos[2(n+1)t]}{\sin t}\,dt \tag{3}$$

(on pourra calculer la dérivée de $\sum_{k=0}^{n} u_k$).

En déduire la somme sur $]0, \pi[$ de la série de fonctions $\sum u_n$.

3° Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \pi - \alpha]$.

4° Soit f la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}\,.$$

a) Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et que $f \in \mathcal{D}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et exprimer $f'(x)$ pour $x \in]0, \pi[$.
f est-elle dérivable à droite en 0 ?

c) f est-elle développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$? Dans l'affirmative, préciser la série de Fourier de f.

Partie III

On désigne par g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et telle que

$$\begin{cases} g(0) = g(\pi) = 0 \\ (\forall\, x \in]0, \pi[) \quad g(x) = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

1° Montrer que g est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa série de Fourier.

2° En déduire la valeur des sommes

$$\sigma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

3° Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En utilisant le résultat de la question **I.3)**, montrer que la série de Fourier de g converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, \pi - \alpha]$.
La convergence est-elle encore uniforme sur $[0, \pi]$?

Dans la suite du problème, on pose pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1}.$$

4° Montrer que la courbe représentative de V_n peut se déduire de l'arc de cette courbe pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par des transformations simples que l'on précisera.

5° Déterminer, pour $n \geqslant 1$, la plus petite valeur λ_n (respectivement μ_n) de x où V_n atteint un maximum (respectivement minimum) local sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6° Etudier les variations de V_2 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et tracer la courbe représentative de V_2 sur $[0, \pi]$.

Partie IV

Dans cette partie on étudie les suites $\left(V_n(\lambda_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(V_n(\mu_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, λ_n et μ_n ayant été définis à la question **III.5)**.

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_n(x) = \int_0^x \frac{\sin[2(n+1)t]}{2t}\, dt.$$

1° Montrer que les suites $\left(W_n(\lambda_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(W_n(\mu_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont constantes et donner la valeur de ces constantes, notées a et b, sous forme d'intégrale.

2° Etablir la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

et en déduire que la suite de fonctions $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers une fonction que l'on précisera.

3° Soit h la fonction définie par

$$\begin{cases} h(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t} & \text{si } t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ h(0) = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que h est de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire que la suite de fonctions $(V_n - W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4° En déduire la valeur de l'intégrale I et montrer que les suites $\left(V_n(\lambda_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(V_n(\mu_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent, respectivement, vers a et b (définis à la question **IV.1**)).

5° Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\alpha_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{2t}\, dt\,.$$

a) Montrer que la série $\sum \alpha_n$ est une série alternée et que la suite $(|\alpha_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers 0. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$?

b) En déduire que $b < \frac{\pi}{4} < a$.